پاسخ مسائل صفحه ۹۹ حساب دیفرانسیل و انتگرال

۱- با توجه به تعریف تابع f ، این تابع در تمام نقاط مخالف یک پیوسته است . پس پیوستگی f را در $x=۱$ بررسی می‌کنیم:

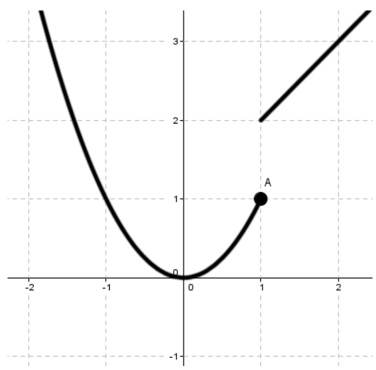
$$\lim_{x\to ۱^+} f(x)=\lim_{x\to ۱^+}\frac{x^۲-۱}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{(x-۱)(x+۱)}{(x-۱)}=\lim_{x\to ۱^+} x+۱=۱+۱=۲$$

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x)=\lim_{x\to ۱^-} x^۲=۱^۲=۱$$

و لذا f در $x=۱$ حد ندارد و بنابراین

در این نقطه پیوسته نیست.

نمودار تابع f نیز موید این مطلب است:



۲- داریم:

$$f(۰)=a$$

$$\lim_{x\to ۰} f(x)=\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt[۳]{x+۸}-۲}{x}=\lim_{x\to ۰}\frac{\left(\sqrt[۳]{x+۸}-۲\right)\left(\sqrt[۳]{x+۸}^۲+۲\sqrt[۳]{x+۸}+۴\right)}{x\left(\sqrt[۳]{x+۸}^۲+۲\sqrt[۳]{x+۸}+۴\right)}=\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt[۳]{x+۸}^۳-۲^۳}{x\left(\sqrt[۳]{x+۸}^۲+۲\sqrt[۳]{x+۸}+۴\right)}$$

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{x+۸-۸}{x\left(\sqrt[۳]{x+۸}^۲+۲\sqrt[۳]{x+۸}+۴\right)}=\lim_{x\to ۰}\frac{۱}{\left(\sqrt[۳]{x+۸}^۲+۲\sqrt[۳]{x+۸}+۴\right)}=\frac{۱}{۲^۲+۲\times ۲+۴}=\frac{۱}{۱۲}$$

لذا برای پیوستگی f در $x=۰$ باید داشته باشیم $\lim_{x\to ۰} f(x)=f(۰)$ و بنابراین داریم $a=\frac{۱}{۱۲}$.

۳- اولاً داریم $f(۰)=a$.حال باید $\lim_{x\to ۰} f(x)$ را پیدا کنیم . چون در ضابطه‌ی f نماد قدرمطلق ظاهر شده است بهتر است از حدود یکطرفه استفاده کنیم:

$$\lim_{x\to ۰^+} f(x)=\lim_{x\to ۰^+}\frac{|x|}{x}\sqrt{|x|}=\lim_{x\to ۰}\frac{x}{x}\sqrt{x}=\lim_{x\to ۰}\sqrt{x}=\sqrt{۰}=۰$$

$$\lim_{x\to ۰^-} f(x)=\lim_{x\to ۰^-}\frac{|x|}{x}\sqrt{|x|}=\lim_{x\to ۰}\frac{-x}{x}\sqrt{-x}=\lim_{x\to ۰}\sqrt{-x}=\sqrt{۰}=۰$$

بنابراین داریم $\lim_{x\to ۰} f(x)=۰$. لذا $a=۰$.

۴- باید $f(۰)$ ، $\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to ۰^-} f(x)$ هر سه با هم برابر باشند. داریم:

$$\lim_{x\to ۰^+} f(x)=\lim_{x\to ۰^+}\frac{\sin x}{\sqrt{۱-\cos x}}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{\sin x\sqrt{۱+\cos x}}{\sqrt{۱-\cos x}\sqrt{۱+\cos x}}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{\sin x\sqrt{۱+\cos x}}{\sqrt{\sin^۲ x}}=$$

$$\lim_{x\to ۰^+}\frac{\sin x\sqrt{۱+\cos x}}{|\sin x|}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{\sin x\sqrt{۱+\cos x}}{\sin x}=\lim_{x\to ۰^+}\sqrt{۱+\cos x}=\sqrt{۱+۱}=\sqrt{۲}$$

$$\lim_{x\to ۰^-} f(x)=\lim_{x\to ۰^-}\left(a+[x]\right)=a-۱$$

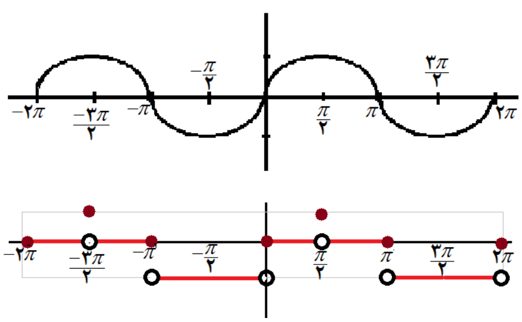
و $f(۰)=b$. بنابراین داریم:

$$b=a-۱=\sqrt{۲}\Rightarrow\begin{cases}a=\sqrt{۲}+۱\\ b=\sqrt{۲}\end{cases}$$

۵ - تابع جز صحیح در نقاط $k\in\mathbb{Z}$ ، پیوسته نیست. لذا نقاط ناپیوستگی تابع $\left[\frac{x}{۲}\right]$ آن x هایی هستند که برای آن‌ها داریم $\frac{x}{۲}=k$ و یا

$$x=۲k \qquad , \quad \mathrm{k}\in\mathbb{Z}$$

۶- بهترین راه برای حل این مساله رسم نمودار تابع است:



با توجه به شکل نقاط ناپیوستگی تابع $[\sin x]$ عبارتند از:

$\frac{-۳\pi}{۲},-\pi,۰,\frac{\pi}{۲},\pi,۲\pi$. و لذا نقاط پیوستگی این تابع در بازه‌ی $[-۲\pi,۲\pi]$ عبارتند

از $[-۲\pi,۲\pi]-\left\{\frac{-۳\pi}{۲},-\pi,۰,\frac{\pi}{۲},\pi,۲\pi\right\}$

۷- فرض کنیم تابع f در a پیوسته باشد، لذا داریم $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$. حال با توجه به پیوستگی تابع قدر مطلق ، می‌توان بنا بر قضیه ۳ صفحه ۹۹ جای

$|\ |$ و $\lim\limits_{x\to a}$ را عوض کرد .پس داریم:

$$\lim_{x\to a}|f(x)|=\left|\lim_{x\to a} f(x)\right|=|f(a)|$$

و لذا تابع $|f|$ در $x=a$ پیوسته است . توجه کنید که عکس این مطلب صحیح نیست. مثلاً تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{|x|}{x} & \mathrm{x}\neq ۰\\ ۱ & \mathrm{x}=۰\end{cases}$ را در نظر بگیرید. برای این تابع

داریم $|f(x)|=\begin{cases}\left|\frac{|x|}{x}\right|=\frac{|x|}{|x|}=۱ & \mathrm{x}\neq ۰\\ |۱|=۱ & \mathrm{x}=۰\end{cases}\equiv ۱$ که در $x=۰$ پیوسته است ، در حالیکه تابع f به دلیل عدم وجود حد در $x=۰$ ناپیوسته است.

۸- دو تابع $f\left(x\right)=\begin{cases}\frac{۱}{x} & x\neq ۰\\ ۰ & x=۰\end{cases}$ و $g\left(x\right)=\begin{cases}-\frac{۱}{x} & x\neq ۰\\ ۰ & x=۰\end{cases}$ را در نظر بگیرید. این توابع هر دو در $x=۰$ ناپیوسته اند (چون حد ندارند) ، در

حالیکه $f\left(x\right)+g\left(x\right)=\begin{cases}\frac{۱}{x}-\frac{۱}{x} & x\neq ۰\\ ۰+۰ & x=۰\end{cases}\equiv ۰$ ، همه جا بخصوص در $x=۰$ پیوسته است.

۹- $f\left(x\right)=\begin{cases}۱ & x\in\mathbb{Q}\\ ۰ & x\in\mathbb{Q}'\end{cases}$ و $g\left(x\right)=\begin{cases}۰ & x\in\mathbb{Q}\\ ۱ & x\in\mathbb{Q}'\end{cases}$ هر دو در $x=۰$ ناپیوسته اند، چون در این نقطه حد ندارند. در حالی که

$f\left(x\right)g\left(x\right)=\begin{cases}۱\times ۰ & x\in\mathbb{Q}\\ ۰\times ۱ & x\in\mathbb{Q}'\end{cases}\equiv ۰$ تابع ثابت صفر است که همه جا پیوسته است.

۱۰- فرض خلف گیریم که $f+g$ در a پیوسته باشد. در این صورت چون توابع f و $g+f$ در a پیوسته اند لذا بنا بر قضیه ۱ تفاضل آنها یعنی

$\left(f+g\right)-f=g$ نیز در a پیوسته است که این متناقض با فرض ناپیوستگی g در a است.

۱۱- در نقاط غیر صحیح هم $\left[x\right]$ و هم $\sin\pi x$ پیوسته‌اند و لذا بنا بر قضیه ۱ حاصلضرب آن‌ها نیز در این نقاط پیوسته است. پس کافی است پیوستگی f را در نقاط صحیح بررسی کنیم. پس فرض کنیم $k\in\mathbb{Z}$ دلخواه باشد. داریم:

$$f\left(k\right)=\left[k\right]\sin k\pi=k\times ۰=۰$$
$$\lim_{x\to k^{+}}f\left(x\right)=\lim_{x\to k^{+}}\left[x\right]\sin\pi x=k\sin k\pi=k\times ۰=۰$$
$$\lim_{x\to k^{-}}f\left(x\right)=\lim_{x\to k^{-}}\left[x\right]\sin\pi x=\left(k-۱\right)\sin k\pi=\left(k-۱\right)\times ۰=۰$$

بنا براین تابع f در نقاط $\mathbb{Z}$ نیز پیوسته است و لذا در کل $\mathbb{R}$ پیوسته است.

۱۲-داریم $۴\leq x^{۲}<\left(۲+k\right)^{۲} \quad\Rightarrow\quad ۲\leq x<۲+k$. از آن جا که برای پیوستگی $\left[x^{۲}\right]$ ، لازم است که $x^{۲}$ عددی ناصحیح باشد پس باید داشته باشیم

$$\left(۲+k\right)^{۲}\leq ۵ \quad\Rightarrow\quad ۲+k\leq\sqrt{۵} \quad\Rightarrow\quad k\leq\sqrt{۵}-۲$$

پس بزرگترین مقدار k برابر با $\sqrt{۵}-۲$ است.

۱۳ – ابتدا معادله‌ی $x^{۲}=\left|x\right|$ را حل می‌کنیم. دو طرف را به توان دو می‌رسانیم و داریم:

$$x^{۴}=x^{۲} \;\Rightarrow\; x^{۴}-x^{۲}=۰ \;\Rightarrow\; x^{۲}\left(x^{۲}-۱\right)=۰ \;\Rightarrow\; x^{۲}\left(x-۱\right)\left(x+۱\right)=۰ \;\Rightarrow\; x=۰,۱,-۱$$

بنابراین $f\left(x\right)=\begin{cases}۴ & x=۰,۱,-۱\\ x+۲ & \text{otherwise}\end{cases}$. با توجه به ضابطه های f ، f همه جا پیوسته است به جز احتمالاً در نقاط ۰,۱,-۱ .پس کافی است پیوستگی آن را فقط در این نقاط بررسی کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} f(۰)=۴ \\ \lim\limits_{x\to ۰} f(x)=\lim\limits_{x\to ۰} x+۲=۲ \end{array}\right\} \Rightarrow$$ پیوسته نیست $x=۰$ در f

$$\left.\begin{array}{l} f(۰)=۴ \\ \lim\limits_{x\to ۱} f(x)=\lim\limits_{x\to ۱} x+۲=۳ \end{array}\right\} \Rightarrow$$ پیوسته نیست $x=۱$ در f

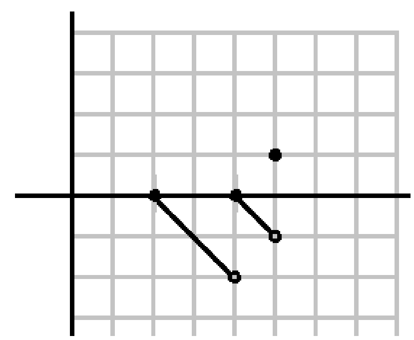
$$\left.\begin{array}{l} f(۰)=۴ \\ \lim\limits_{x\to -۱} f(x)=\lim\limits_{x\to -۱} x+۲=۱ \end{array}\right\} \Rightarrow$$ پیوسته نیست $x=-۱$ در f

۱۴- ابتدا دامنه‌ی f را می یابیم:

$$\left.\begin{array}{llll} \sqrt[۳]{x+۱}-۱=۰ & \Rightarrow \quad x+۱=۱ & \Rightarrow & x=۰ \\ x+۳\geq ۰ & \Rightarrow \quad x\geq ۳ & & \end{array}\right\} \Rightarrow \quad D_f=[-۳,+\infty)-\{۰\}$$

با توجه به پیوستگی توابع $\sqrt[۳]{\ },\sqrt{\ }$ ، تابع f در تمام نقاط دامنه‌اش پیوسته است.

۱۵-



$$f(x)=[x]-x+\sin\left(\frac{\pi}{۲}[x]\right)$$

$$۲\leq x<۳ \quad \Rightarrow \quad [x]=۲ \quad \Rightarrow \quad f(x)=۲-x+\sin\frac{۲\pi}{۲}=۲-x$$

$$۳\leq x<۴ \quad \Rightarrow \quad [x]=۳ \quad \Rightarrow \quad f(x)=۳-x+\sin\frac{۳\pi}{۲}=۳-x-۱=۲-x$$

$$۴\leq x<۵ \quad \Rightarrow \quad [x]=۴ \quad \Rightarrow \quad f(x)=۴-x+\sin\frac{۴\pi}{۲}=۴-x$$

$$x=۵ \quad \Rightarrow \quad f(۵)=[۵]-۵+\sin\left(\frac{۵\pi}{۲}\right)=۱$$

پس این تابع در ۴و ۵ ناپیوسته است.

۱۶-ابتدا نامعادله‌ی $x^۲\geq ۲|x|$ را حل می کنیم:

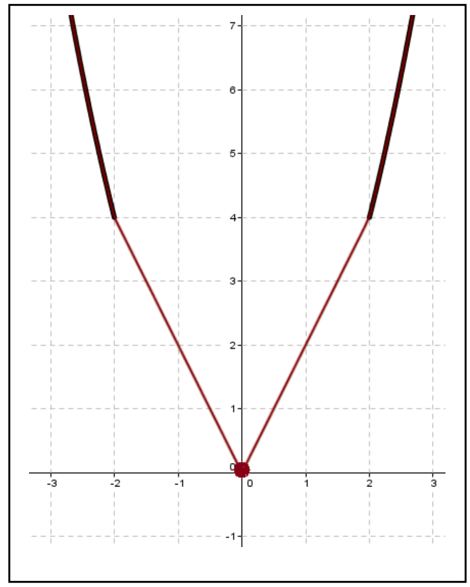
$$x^۲\geq ۲|x| \quad \Rightarrow \quad x^۴\geq ۴x^۲ \quad \Rightarrow \quad x^۴-۴x^۲\geq ۰ \quad \Rightarrow \quad x^۲(x^۲-۴)\geq ۰ \quad \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{c} x=۰ \\ \text{or} \\ x^۲-۴\geq ۰ \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} x=۰ \\ \text{or} \\ x^۲\geq ۴ \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad x\geq ۲ \quad \text{or} \quad x=۰ \quad \text{or} \quad x\leq -۲$$

به همین شکل مجموعه جواب نامعادله‌ی $x^۲<۲|x|$ عبارت است از $۰<x<۲ \quad \text{or} \quad -۲<x<۰$. پس ضابطه‌ی f به صورت زیر درمی آید:

$$f\left(x\right)=\begin{cases} x^{۲} & \text{if} \quad x\le -۲ \quad \text{or} \quad x=۰ \quad \text{or} \quad x\ge ۲ \\ ۲\left|x\right| & \text{if} \quad -۲<x<۰ \quad \text{or} \quad ۰<x<۲ \end{cases}$$

با توجه به ضابطه‌های f کافی است پیوستگی را در نقاط $x=-۲$ و $x=۲$ و $x=۰$ بررسی کنیم:



$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to ۲^{+}} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to ۲^{+}} x^{۲}=۴ \\ \lim\limits_{x\to ۲^{-}} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to ۲^{-}} ۲\left|x\right|=۴ \\ \text{f}\left(۲\right)=۴ \end{array}\right\} \Rightarrow$$ پیوسته است $x=۲$ در f

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -۲^{+}} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to -۲^{+}} ۲\left|x\right|=۲\left|-۲\right|=۴ \\ \lim\limits_{x\to -۲^{-}} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to -۲^{-}} x^{۲}=\left(-۲\right)^{۲}=۴ \\ f\left(-۲\right)=۴ \end{array}\right\} \Rightarrow$$ پیوسته است $x=-۲$ در f

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to ۰} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to ۰} ۲\left|x\right|=۲\left|۰\right|=۰ \\ f\left(۰\right)=۰^{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow$$ پیوسته است $x=۰$ در f

و بنابراین تابع f روی کل مجموعه‌ی $\mathbb{R}$ پیوسته است.

۱۷- با تعیین علامت کردن عبارت $x^{۲}+x-۲$ متوجه می شویم که $\text{sgn}\left(x^{۲}+x-۲\right)=\begin{cases} ۱ & \text{if} \quad x<-۲ \quad \text{or} \quad x>۱ \\ ۰ & \text{if} \quad x=-۲ \quad \text{or} \quad x=۲ \\ -۱ & \text{if} \quad -۲<x<۱ \end{cases}$. و لذا داریم:

$$\left(x^{۲}-bx+a\right)\text{sgn}\left(x^{۲}+x-۲\right)=\begin{cases} x^{۲}-bx+a & \text{if} \quad x<-۲ \quad \text{or} \quad x>۱ \\ ۰ & \text{if} \quad x=-۲ \quad \text{or} \quad x=۱ \\ -\left(x^{۲}-bx+a\right) & \text{if} \quad -۲<x<۱ \end{cases}$$

پس این تابع باید در نقاط ۱ و ۲− پیوسته باشد. لذا با نوشتن شرط پیوستگی در این نقاط داریم:

$$\left.\begin{array}{lll} \left(-۲\right)^{۲}-b\left(-۲\right)+a=۰ & \Rightarrow \quad ۴+۲b+a=۰ & \Rightarrow \quad a+۲b=-۴ \\ ۱^{۲}-b\left(۱\right)+a=۰ & \Rightarrow \quad a-b=-۱ & \Rightarrow \quad -a+b=۱ \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} a=-۲ \\ b=-۱ \end{cases}$$

روش سریعتر این که ریشه های $x^{۲}+x-۲$ یعنی ۱ و ۲− باید در $x^{۲}-bx+a=۰$ صدق کنند. که با نوشتن شرایط باز هم به دستگاه بالا می رسیم.